Hertentamen 1, Fouriertheorie, 21-01-04, 09.00–12.00 uur

Alle te gebruiken formules met betrekking tot Fourierreeksen en Fourierintegralen worden in de tekst van dit tentamen vermeld. Gebruik alleen deze formules!

1. (a) Definieer $f_n(x) = (n^2 + x^2)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$. Bepaal door verwisseling van limiet en integratie

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,dx.$$

Laat zien hoe het antwoord verkregen wordt.

(b) Definieer $f_n(x) = n^2(n^2 + x^2)^{-1}$. Bepaal door verwisseling van limiet en integratie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Laat zien hoe het antwoord verkregen wordt.

2. Definieer de functie

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,\frac{\sin xt}{t}\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Toon aan dat f en f' bestaan en continu zijn op $\mathbb{R}$ en dat

$$f'(x) = \int_0^\infty e^{-t}\cos xt\,dt.$$

Aanwijzing: Maak gebruik van $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}\,du = 1$.

(b) Toon aan dat $f(x) = \arctan x + C$ en bepaal de constante C.
Aanwijzing: gebruik $2\cos xt = e^{ixt} + e^{-ixt}$ en bereken de integraal voor $f'(x)$.

3. De Fourierreeksontwikkeling van de oneven functie $f(x) = \sin(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, wordt gegeven door

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx = \frac{8}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}.$$

(a) Toon aan (via $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$) dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}.$$

(b) Laat zien dat de convergentie van de reeks (1) niet uniform is op $[-\pi, \pi]$, maar wel op $[0, t]$ met $0 < t < \pi$.

(c) Laat zien voor $0 < t < \pi$ dat

$$\text{(2)} \qquad \cos\frac{t}{2} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nt.$$

(d) Laat zien dat (2) ook geldt voor $t = \pi$ (denk aan uniforme convergentie en continuiteit) en toon aan dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16k^2+16k+3} = \frac{\pi}{8}.$$

4. De Fouriergetransformeerde $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\,dt$ van $f \in L^1(\mathbb{R})$ wordt gegeven door

$$\widehat{f}(x) = 4\,\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

(a) Laat zien dat hierdoor $\widehat{f}(0)$ wordt vastgelegd en bepaal $\widehat{f}(0)$.

(b) Toon aan dat de bijbehorende functie f wordt gegeven door

$$f(t) = 1 - t^2, \quad |t| \leq 1, \quad f(t) = 0, \quad |t| > 1.$$

(c) Toon aan (via $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2\,dx = 2\pi\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt$) dat

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\right)^2 dx = \frac{\pi}{15}.$$